פתרון בגרויות במתמטיקה לשאלון 582

פרק 2

פתרון בוידאו של בחינות 2022

חורף 1
מועד נבצרים 5
קיץ מועד א 9
קיץ מועד ב 14

בגרות 2022 מועד חורף:

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1) הנקודה $(t,0)$ היא מוקד של פרבולה קנונית ומוקד של אליפסה קנונית.
t הוא פרמטר חיובי.
אורך הציר הראשי של האליפסה הוא $4t$.
בסעיפים שלפניך הבע את תשובותיך באמצעות t, אם יש צורך.

א. מצא את משוואת הפרבולה ואת משוואת האליפסה.

המדריך של הפרבולה חותך את האליפסה בשתי נקודות, A ו-B.
הנקודה A נמצאת מעל לנקודה B.

ב. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

ישר המאונך לציר ה-x עובר במוקד הפרבולה וחותך את הפרבולה בשתי נקודות C ו-D. הנקודה C נמצאת מעל לנקודה D.

ג. מצא את שיעורי הנקודות C ו-D.

ד. (1) הסבר מדוע ארבע הנקודות A, B, C ו-D נמצאות על מעגל אחד.
(2) מצא את שיעורי מרכז המעגל הזה.

2) נתונים שני מישורים: $\pi_1: z-3=0$, $\pi_2: ay+z-8=0$, a הוא פרמטר שונה מ-0. הזווית בין המישורים היא $45°$.

א. מצא את הערכים האפשריים עבור הפרמטר a.

הנקודה $A(2,-2,6)$ נמצאת על אחד המישורים הנתונים.
מן הנקודה A הורידו אנך למישור האחר.
האנך חותך את המישור האחר בנקודה B.

ב. מצא את אורך הקטע AB.

l הוא ישר החיתוך בין שני המישורים π_1 ו-π_2.

ג. מצא את ההצגה הפרמטרית של l.

מן הנקודה B העבירו אנך לישר l. האנך חותך את הישר l בנקודה C.

ד. מצא את שטח המשולש ABC (תוכל לסרטט את המשולש במערכת צירים לשם כך).

3) נתונים שני מספרים מרוכבים: $z_1=\left(2a^2+5a+4\right)+\left(2a^2+3a+2\right)i$

$z_2=\left(a^2+8a+8\right)+\left(2-a^2+2a\right)i$

a הוא פרמטר ממשי.

א. מצא את הערך של a שבעבורו המספרים z_1 ו- z_2 צמודים זה לזה.

הצב את הערך של a שמצאת וענה על הסעיפים ב-ג.

נתונים המספרים: $w_1=\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{4n}$, $w_2=\left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^{4n+2}$. n הוא מספר טבעי.

ב. הוכח כי לכל n טבעי:

(1) המספר w_1 הוא מספר ממשי.

(2) המספר w_2 הוא מספר מדומה טהור.

ג. נתונה המשוואה: $|z-p|=m$. p ו- m הם פרמטרים ממשיים, z הוא מספר מרוכב. מה הם הערכים של p ו- m שבעבורם המשוואה הנתונה מתארת מעגל במישור גאוס שעליו נמצאים המספרים w_1 ו- w_2 לכל n טבעי? נמק.

ענה על <u>אחת</u> מן השאלות 4-5 ($33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{e^{2x}-3e^x+m}{4}$. m הוא פרמטר.

ידוע כי הישר $y=-1$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את m.

(3) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x)=\frac{1}{f(x)}+1$.

ג. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את משוואת האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתון פרמטר t בתחום $0<t<\ln 4$.

ה. מצא את הערך של t שבעבורו ערך הביטוי $\int_0^t g(x)\,dx$ הוא מקסימלי.

נמק את תשובתך.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{(\ln(x))^2}{(\ln(x))^2-1}$.

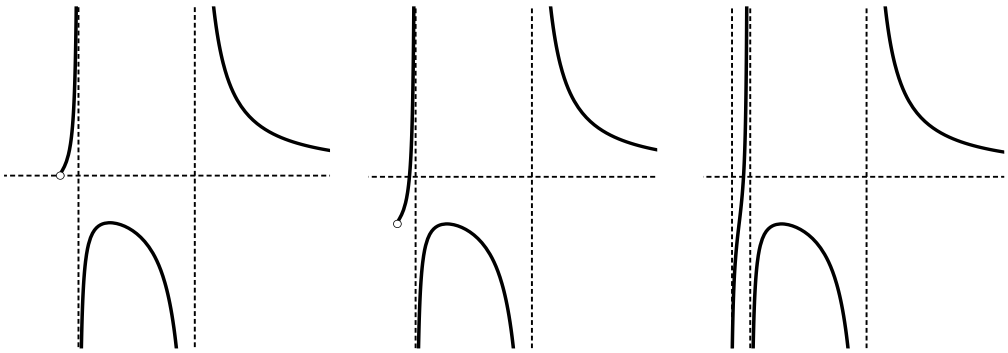
א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ב. לפניך שלושה גרפים שבהם <u>לא מסומנים</u> הצירים x ו- y. הקווים המרוסקים מייצגים את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים, והעיגול הריק מייצג נקודה שבה הפונקציה אינה מוגדרת. קבע איזה מן הגרפים מתאים לגרף הפונקציה $f(x)$, העתק אותו למחברתך, והוסף בו את מערכת הצירים. פרט של שיקוליך.

גרף א **גרף ב** **גרף ג**



ג. (1) האם יש פתרון למשוואה $f(x)=1$? נמק את תשובתך.

(2) מהו הערך של k שבעבורו יש למשוואה $f(x)=k$ פתרון יחיד?

נמק את תשובתך.

נתונות הפונקציות: $h(x)=(\ln(x))^2+1$, $g(x)=\dfrac{1}{f(x)-1}$.

נסמן מלבן ABCD. הנקודות A ו-B הן שתי נקודות על ציר ה-x שבהן הפונקציה $g(x)$ אינה מוגדרת. הנקודות C ו-D נמצאות על גרף הפונקציה $h(x)$.

ד. מהו שטח המלבן ABCD? נמק את תשובתך.

תשובות סופיות:

1) א. משוואת האליפסה: $\frac{x^2}{4t^2}+\frac{y^2}{3t^2}=1$, משוואת הפרבולה: $y^2=4tx$.

ב. $A\left(-t,\frac{3t}{2}\right)$, $B\left(-t,-\frac{3t}{2}\right)$.

ג. $C(t,2t)$, $D(t,-2t)$.

ד. (1). טרפז שווה שוקיים. (2). $\left(\frac{7t}{16},0\right)$.

2) א. $a=\pm1$. ב. 3. ג. $x=(0,-5,3)+t(1,0,0)$.

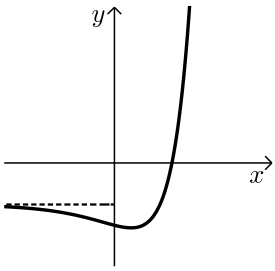
ד. 4.5.

3) א. $a=-1$. ב. (1). הוכחה. (2). הוכחה.

ג. $m=1$, $p=0$.

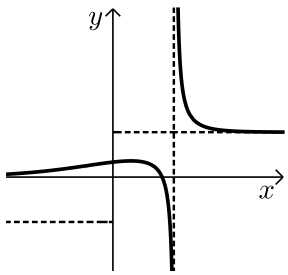
4) א. (1). כל x . (2). $m=-4$. (3). $(0,-1.5)$, $(\ln 4,0)$.

(4). $\min\left(\ln\frac{3}{2},\frac{-25}{16}\right)$. ב.



ג. (1). $x\neq\ln 4$. (2). $x=\ln 4$, $y=1$, $y=0$.

ד.



ה. $t=\ln 3$.

5) א. (1). $x>0$, $x\neq\frac{1}{e},e$. (2). $x=e$, $x=\frac{1}{e}$, $y=1$.

(3). תחומי עלייה: $0<x<\frac{1}{e}$ או $\frac{1}{e}<x<1$.

תחומי ירידה: $e<x$ או $1<x<e$. ב. גרף ג'.

ג. (1). לא. (2). $k=0$. ד. $S=\frac{2e^2-2}{e}=2\left(e-\frac{1}{e}\right)$.

בגרות 2022 מועד חורף נבצרים:

ענה על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1) מעגל שמרכזו בנקודה M חסום במשולש ABC .
הצלע AB נמצאת על הישר : $2x+y-13=0$ והצלע AC נמצאת על הישר : $-x+2y+4=0$.
מרכז המעגל M נמצא על הישר : $y=x-1$.
ראשית הצירים נמצאת בתוך המשולש ABC.

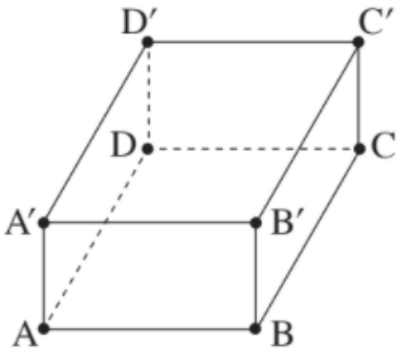
א. מצא את משוואת המעגל החסום במשולש ABC.
נתון כי הישר BM מאונך לציר ה-x.
ב. מצא את משוואת הצלע BC.
ג. מצא את המרחק בין מרכז המעגל החסום במשולש ABC ובין מרכז המעגל החוסם את המשולש הזה.

2) נתונה מנסרה ישרה ABCDA'B'C'D', שבסיסה הוא מעוין ABCD (ראה סרטוט).

נקודה F נמצאת על המישור ACD' כך ש : $\overrightarrow{D'F}=t\overrightarrow{D'A}+\frac{1}{4}\overrightarrow{D'C}$, t הוא פרמטר.

נתון : DF מאונך למישור : ACD' , $\sphericalangle ADC=120°$, $\left|\overrightarrow{DC}\right|=4$.

נסמן : $\overrightarrow{DD'}=\underline{w}$, $\overrightarrow{DC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{DA}=\underline{u}$.



א. בטא את $\overrightarrow{DF}$ באמצעות : w, v, u ו-t.
ב. מצא את t.
ג. חשב את נפח המנסרה.
נתון : הנקודה D היא ראשית הצירים, הקודקוד A נמצא על החלק החיובי של ציר ה-x, הקודקוד D' נמצא על החלק החיובי של ציר ה-z, $C=\left(-2,\sqrt{12},0\right)$.
ד. מצא את שיעורי הנקודה F.

3) ענה:

א. פתור את המשוואה: $(z+i)^2-2-2\sqrt{3}i=0$, z הוא מספר מרוכב.

נסמן את החלקים הממשיים של פתרונות המשוואה ב-a_1 וב-a_2 כך ש-$a_1<a_2$.

נתונים שני מקומות גאומטריים:

I. $|z-ia_1|=\sqrt{3}$.

II. $|z-ia_2|=\sqrt{3}$.

ב. סרטט באותה מערכת צירים סקיצה של שני המקומות הגאומטריים.
הישר $y=x$ נמצא במישור גאוס. ישר זה חותך את המקומות הגאומטריים שסרטטת בסעיף ב בראשית הצירים ובשתי נקודות אחרות שמיוצגות על ידי שני המספרים המרוכבים w_1 ו-w_2.

ג. פתור את המשוואה: $z^3=w_1\cdot\overline{w_1}\cdot w_2\cdot\overline{w_2}$, z הוא מספר מרוכב.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{ax}{\ln(x)-a}$, $a>0$ הוא פרמטר.

בסעיפים א-ב, בטא את תשובותיך באמצעות a, אם יש צורך.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגה.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי האנך לציר ה-x העובר בנקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, על ידי הישר $x=e^{a+2}$ ועל ידי ציר ה-x, הוא 3.

ג. מצא את a.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=9^{-x}-6\cdot 3^{-x}+m$, m הוא פרמטר.

א. בתת-סעיפים (1)-(3) בטא את תשובותיך באמצעות m, אם יש צורך.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם יש כאלה).

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ משיק לציר ה-x.

ב. מצא את הערך של הפרמטר m.

ג. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) היעזר בסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $\ln(f(x))$.

ד. הסבר מדוע: $\int_0^1 \left[\ln(f(x))-\ln(4)\right]dx<\ln\left(\frac{9}{4}\right)$.

תשובות סופיות:

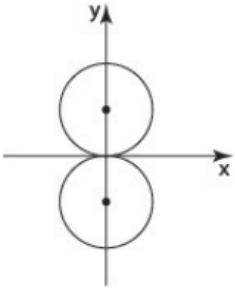
1) א. $(x-3)^2+(y-2)^2=5$ ב. $y=2x+1$ ג. 2.5

2) א. $\overrightarrow{DF}=t\underline{u}+\frac{1}{4}\underline{v}+\left(\frac{3}{4}-t\right)\underline{w}$ ב. $t=\frac{1}{4}$ ג. $V=16\sqrt{3}$

ד. $F\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{12}}{4},1\right)$

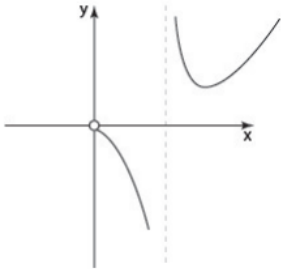
3) א. $Z_1=-\sqrt{3}-2i$, $Z_2=\sqrt{3}$ ב. להלן סרטוט:

ג. $\sqrt[3]{36}$, $\sqrt[3]{36}cis120°$, $\sqrt[3]{36}cis240°$



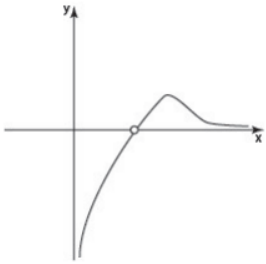
4) א. (1). $0<x\neq e^a$ (2). $\left(e^{a+1},ae^{a+1}\right)$ מינימום.

(3). להלן סרטוט:



ב. (1). $0<x\neq e^a$ (2). $\left(e^{a+1},\frac{1}{ae^{a+1}}\right)$ מקסימום.

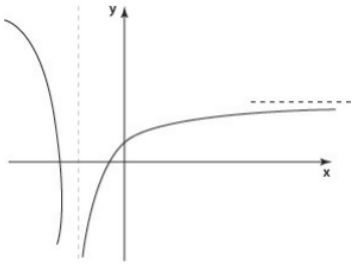
(3). להלן סרטוט: ג. $a=\frac{1}{2}$



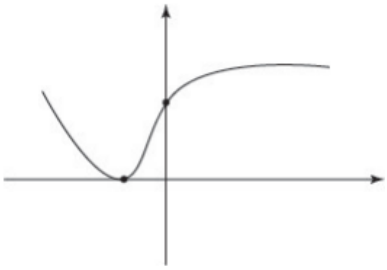
5) א. (1). כל x. (2). $y=m$ (3). $(-1,m-9)$ מינימום.

ב. $m=9$

(2). להלן סרטוט:



ג.(1). להלן סרטוט:



ד. הוכחה.

בגרות 2022 מועד קיץ א':

ענה על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1) נתונים שני מעגלים המשיקים זה לזה מבחוץ.

מרכזו של המעגל האחד הוא בנקודה M ומשוואתו היא: $(x-a)^2+y^2=r^2$, a הוא פרמטר חיובי.

מרכזו של המעגל האחר הוא בנקודה N ומשוואתו היא: $(x-15)^2+y^2=R^2$.

אורכו של הקטע המחבר את מרכזי המעגלים הוא 9, והיחס בין אורכי הרדיוסים של המעגלים הוא: $1:2$, $r<R$.

א. מצאו את משוואת המעגל שמרכזו N ואת שתי האפשרויות למשוואת המעגל שמרכזו M.

נתון כי: $a<15$.

ב. סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של שני המעגלים ושל כל המשיקים המשותפים לשני המעגלים.

ג. מצאו את משוואת המשיק העובר בנקודה המשותפת לשני המעגלים.

ד. הישר: $mx-y+n=0$ הוא משיק משותף לשני המעגלים.
מצאו את m ואת n (שתי אפשרויות).

נתונים שני מעגלים אחרים המשיקים זה לזה מבחוץ.

משוואות המעגלים הן: $(x-t)^2+y^2=r^2$; $(x-k)^2+y^2=R^2$, t ו-k הם פרמטרים. ערכי הרדיוסים r ו-R זהים לאלה שמצאתם בסעיף א.

ה. האם ייתכן כי שני הישרים שאת משוואותיהם מצאתם בסעיף ד משיקים גם למעגלים האלה? אם כן – מצאו את t ואת k. אם לא - נמקו.

2) נתונות ארבע נקודות הנמצאות באותו המישור:

$D(-2,5,-4)$, $C(1,-1,2)$, $B(7,5,5)$, $A(4,p,-1)$, p הוא פרמטר.

א. מצאו את משוואת המישור ABCD.

ב. חשבו את ערך הפרמטר p.

ג. הוכיחו כי המרובע ABCD הוא ריבוע.

הנקודה S היא קודקוד של פירמידה SABCD שבסיסה ABCD.

המקצוע SC מונח על הישר: $x=(0,-4,1)+t(1,3,1)$.

נתון כי נפח הפירמידה הוא 81.

ד. מצאו את שיעורי הנקודה S (שתי אפשרויות).

נתון מישור נוסף π המאונך למקצוע SC.

ה. מצאו את הזווית שבין המישור ABCD ובין המישור π.

3) נתונה המשוואה: $z^2+z\bar{z}=z+2\bar{z}+9+7i$, z הוא מספר מרוכב.

z_1 הוא אחד הפתרונות של המשוואה, והוא מייצג נקודה הנמצאת במישור גאוס ברביע הראשון, על מעגל שמרכזו בראשית הצירים.

א. מצאו את משוואת המעגל.

חוסמים במעגל ריבוע שאחד מקודקודיו מיוצג על ידי המספר z_1.

ב. חשבו את שטח הריבוע.

ג. מצאו את השיעורים של שאר קודקודי הריבוע.

מכפילים ב-$r_1\cdot(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))$ כל אחד מן המספרים המייצגים את שני קודקודי הריבוע שנמצאים ברביעים הראשון והשלישי, ומכפילים

ב-$r_2\cdot(\cos(\alpha+60°)+i\sin(\alpha+60°))$ כל אחד מן המספרים המייצגים את שני קודקודי הריבוע שנמצאים ברביעים השני והרביעי. הנקודות במישור גאוס המייצגות את התוצאות שהתקבלו לאחר ההכפלה יוצרות מרובע קמור חדש במישור גאוס.

נתון: r_1 ו-r_2 חיוביים, $r_1\neq r_2$.

ד. מהו סוג המרובע שהתקבל? נמקו את התשובה.

נתון כי שטח המרובע שהתקבל גדול פי 1.2 משטח הריבוע בסעיף ב.

ה. חשבו את $r_1\cdot r_2$.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=xe^x-2e^x+1$ המוגדרת לכל x.

א. (1) מצאו את משוואת האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה- y (אם יש כאלה).

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y.

(3) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{1-e^x}{e^x-x}$, המוגדרת לכל x.

ב. (1) מצאו את משוואת האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לציר ה- y.

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x (אם יש כאלה).

(3) הוכיחו כי: $g'(x)=\frac{f(x)}{(e^x-x)^2}$.

ג. היעזרו בסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ ומצאו כמה נקודות מקסימום וכמה נקודות מינימום יש לפונקציה $g(x)$. נמקו את התשובה.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ה. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה-x ועל ידי הישר: $x=-1$.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=x+\ln\left(x^2-15\right)$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(4) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ אם ידוע כי אין לה נקודות קיצון.

נתונה הפונקציה: $g(x)=e^{f(x)}$ המוגדרת באותו התחום כמו הפונקציה $f(x)$.

ג. (1) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

(2) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $g(x)$.

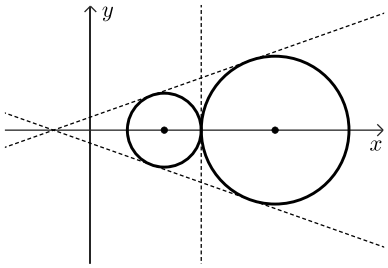
ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקציה: $y=f'(x)\cdot g(x)$, על ידי ציר ה-x ועל ידי הישרים: $x=-6$ ו-$x=-5$.

תשובות סופיות:

1) א. משוואת המעגל שמרכזו N: $(x-15)^2+y^2=36$, משוואות המעגל שמרכזו M:

$(x-24)^2+y^2=9$, $(x-6)^2+y^2=9$.

ב. להלן סקיצה:



ג. $x=9$

ד. $m_1=\frac{1}{\sqrt{8}}$, $n_1=\frac{3}{\sqrt{8}}$, $m_2=-\frac{1}{\sqrt{8}}$, $n_2=-\frac{3}{\sqrt{8}}$

ה. $t=-21$, $k=-21$.

2) א. $2x-y-2z+1=0$ ב. $p=11$ ג. הוכחה.

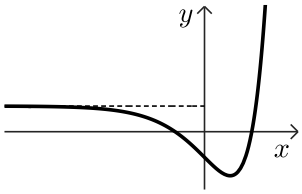
ד. $(-2,-10,-1)$, $(4,8,5)$, $72.5°$.

3) א. $x^2+y^2=10$ ב. 20. ג. $(-3,-1)$, $(-1,3)$, $(1,-3)$.

ד. מקבילית. ה. 2.4.

4) א. (1) $x\to\infty: y=1$ א. (2) $(0,-1)$ א. (3) עלייה: $x>1$, ירידה: $x<1$.

א. (4) להלן סקיצה:

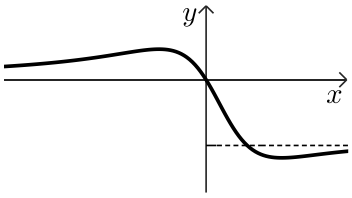


ב. (1) $x\to-\infty: y=0$, $x\to\infty: y=-1$

ב. (2) $(0,0)$ ב. (3) הוכחה.

ג. נק' מינימום אחת, נק' מקסימום אחת.

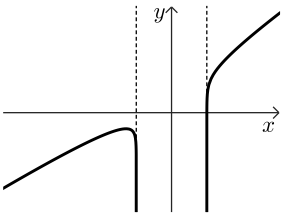
ד. להלן סקיצה:



ה. $\ln\frac{e+1}{e}\approx 0.31$.

5) א. (1) $x>\sqrt{15}$, $x<-\sqrt{15}$ א. (2) $x=\sqrt{15}$, $x=-\sqrt{15}$

א. (3) $\max(-5,-2.7)$ א. (4) להלן סקיצה:

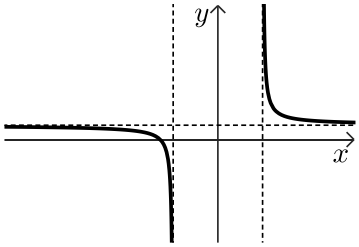


ב. (1) $x>\sqrt{15}$, $x<-\sqrt{15}$

ב. (2) $x=\sqrt{15}$, $x=-\sqrt{15}$, $y=1$

ב. (3) $(-5,0)$

ב. (4) להלן סקיצה:



ג. (1) $\max(-5,0.067)$

ג. (2) עלייה: $x>\sqrt{15}$, $x<-5$, ירידה: $-5<x<-\sqrt{15}$. ד. 0.015.

בגרות 2022 מועד קיץ ב':

ענה על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1) נתונות הנקודות $A(-5,3)$ ו-$B(0,-2)$.

א. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים שהקטע AB הוא מיתר שלהם.

מעגל M הוא אחד מן המעגלים שהקטע AB הוא מיתר שלהם.
נקודות החיתוך של המעגל M עם ציר ה-x הן מוקדים של אליפסה שמשוואתה קנונית.

ב. מצאו את שיעורי מרכז המעגל M ואת הרדיוס שלו.

נתון כי אורך הציר הראשי של האליפסה שווה לאורך קוטר המעגל M.

ג. מהי משוואת האליפסה?

נסמן ב-F את המוקד הימני של האליפסה. ישר המאונך לציר ה-x עובר במוקד השמאלי של האליפסה. הישר חותך את האליפסה בנקודות Q ו-T, ואת המעגל M בנקודות K ו-L.

ד. מצאו את היחס בין שטח המשולש KLF לבין שטח המשולש TQF.

2) נתונה פירמידה OABC שבסיסה משולש ABC.

נסמן: $\overrightarrow{OA}=\underline{u}$, $\overrightarrow{OB}=\underline{v}$, $\overrightarrow{OC}=\underline{w}$.

נתון: $\sphericalangle AOB=\sphericalangle BOC=\sphericalangle COA=90^\circ$, $|\underline{w}|=|\underline{v}|=|\underline{u}|$.

הנקודה H מקיימת: $\overrightarrow{OH}=t\underline{u}+s\underline{v}+k\underline{w}$. t, s ו-k הם פרמטרים.

נתון כי $\overrightarrow{OH}$ מאונך לבסיס ABC של הפירמידה.

א. הוכיחו כי: $t=s=k$.

הנקודה M נמצאת בבסיס ABC של הפירמידה, והיא נקודת המפגש של תיכוני הבסיס.

ב. הוכיחו כי: $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}+\frac{1}{3}\underline{w}$, והסבירו מדוע OM הוא גובה לבסיס ABC של הפירמידה.

הנקודה P נמצאת על הישר ℓ שעליו מונח הגובה לבסיס ABC.

ג. הביעו באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$, את הווקטור $\overrightarrow{OP}$ שבעבורו נפח הפירמידה PABC כפול מנפח הפירמידה OABC (שתי אפשרויות).

ממקמים את הפירמידה OABC במערכת צירים. הנקודה O נמצאת בראשית הצירים, הנקודה A נמצאת על החלק החיובי של ציר ה-x, הנקודה B על החלק החיובי של ציר ה-y, והנקודה C על החלק החיובי של ציר ה-z. נתון: $|\underline{u}| = a$.

ד. מצאו את ההצגה הפרמטרית של הישר ℓ שעליו נמצא הקטע OP.

ה. הביעו באמצעות a את משוואת המישור ABC.

ו. נתון כי נפח הפירמידה OABC הוא $20\frac{5}{6}$. חשבו את a.

3) המספר: $z = R(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)$ נמצא במישור גאוס ברביע השלישי.

נתון: $\frac{z}{\bar{z}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

א. מצאו את α.

נתון: $|2iz| + \left|\frac{\bar{z}}{i}\right| - \left|\frac{z}{\bar{z}}\right| = 8$.

ב. מצאו את R.

ג. נתונה המשוואה: $w^9 = \frac{z^3}{27}$ (z הוא המספר שמצאתם).

הראו כי המספר $\frac{z}{\bar{z}}$ הוא אחד הפתרונות של המשוואה.

ד. המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים.

קודקודי הבסיס B ו-C מתאימים למספרים: $\frac{z}{\bar{z}}$ ו- $\frac{\bar{z}}{z}$.

קודקוד הראש A מתאים למספר $z+k$, k הוא מספר מדומה טהור.

(1) מהו הערך של k?

(2) חשבו את שטח המרובע ABOC (הנקודה O היא ראשית הצירים).

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2e^{a-x^3}$ המוגדרת לכל x, a הוא פרמטר.

א. (1) מצאו את התחום שבו הפונקציה $f(x)$ חיובית.

(2) מצאו את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

נתון כי השטח הכלוא בין הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ לבין ציר ה-x הוא $\sqrt[3]{\frac{4e}{9}}$.

ב. מצאו את הערך של a.

הציבו $a=1$, וענו על הסעיפים ג-ה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

הפונקציה $f(x)$ היא נגזרת של הפונקציה $g(x)$ $\left(g'(x)=f(x)\right)$.

ד. (1) מהו תחום העלייה של הפונקציה $g(x)$? נמקו.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $g(x)$? נמקו.

נסמן ב-B את נקודת הפיתול שבה הערך של הפונקציה $g(x)$ הוא הגבוה מבין כל נקודות הפיתול שלה. נתון כי שיעור ה-y של הנקודה B הוא $\frac{e-\sqrt[3]{e}}{3}$.

ה. מצאו את הפונקציה $g(x)$.

5) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת את התכונות האלה: הפונקציה מוגדרת לכל x ורציפה, הפונקציה היא אי-זוגית, הישר $y=0$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה, ולפונקציה יש נקודת מינימום יחידה ששיעוריה הם: $(-1,-a)$, a הוא פרמטר חיובי.

א. סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $h(x)=\ln\left(f(x)\right)$.

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $h(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצאו את טווח הערכים של a שבעבורו גרף הפונקציה $h(x)$ חותך את ציר ה-x בשתי נקודות.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$, אם ידוע שהגרף שלה חותך את ציר ה-x בשתי נקודות.

נתון: $f(x)=\frac{4x}{1+x^2}$.

$g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g'(x)=f(x)$ וגם: $g(0)=0$.

ג. (1) מצאו את הפונקציה $g(x)$.

(2) האם הפונקציה $g(x)$ היא זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? נמקו.

לפניכם האינטגרל: $\int_{-5}^{t} g(x)dx$, $t>-5$.

ד. מהו הערך של t שבעבורו מתקיים: $2\cdot\int_{-5}^{t} g(x)dx=\int_{-5}^{5} g(x)dx$? נמקו.

תשובות סופיות:

1) א. $x-y+3=0$ ב. $M(0,3)\ ,\ R=5$ ג. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ד. $\frac{5}{3}$.

2) א. הוכחה. ב. הוכחה.

ג. $\overrightarrow{OP_1}=\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}\ ,\ \overrightarrow{OP_2}=-\frac{1}{3}\underline{u}-\frac{1}{3}\underline{v}-\frac{1}{3}\underline{w}$

ד. $\ell=t(1,1,1)$ ה. $x+y+z-a=0$ ו. $a=5$.

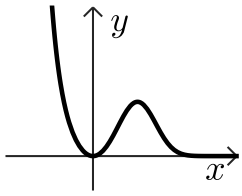
3) א. $\alpha=240°$ ב. $R=3$ ג. הוכחה.

ד. (1) $k=\frac{3\sqrt{3}}{2}i$ ד. (2) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

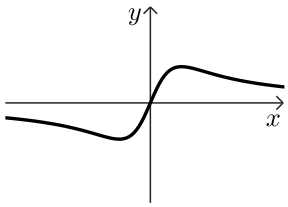
4) א. (1) $x\neq 0$ א. (2) מינימום: $x=0$, מקסימום: $x=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\approx 0.87$.

ב. $a=1$ ג. להלן סקיצה: ד. (1) כל x ד. (2) 2 נקודות.

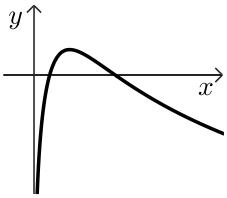
ה. $g(x)=\frac{e-e^{1-x^3}}{3}$.



5) א. להלן סקיצה: ב. (1) $x>0$ ב. (2) $x=0$ ב. (3) $a>1$



ב. להלן סקיצה:



ג. (1) $g(x)=2\ln(1+x^2)$

ג. (2) זוגית. ד. $t=0$.